اثر میدان گرانشی بر رفتار دینامیکی الگوی جینز- کامینگز در رژیم پاشنده

محمدی ، مجید[۱و۲] ؛ نادری ، محمد حسین[۳] ؛ سلطان الکتا بی ، محمود[۳]
[۱] گروه فیزیک دانشگاه آزاد اسلامی واحد علوم وتحقیقات ، تهران
[۲] گروه فیزیک دانشگاه آزاد اسلامی واحد شهرضا ، شهرضا
[۳] گروه پژوهشی اپتیک کوانتومی دانشگاه اصفهان ، اصفهان

چکیده

در این مقاله به بررسی رفتار دینامیکی الگوی جینز-کامینگز در رژیم پاشنده و در حضور یک میدان گرانشی یکنواخت می پردازیم. برای این منظور ابتدا بر اساس جبر $su(2)$ ، به عنوان گروه تقارن دینامیکی سیستم برهم کنشی اتم – میدان در حدپاشنده و در حضور میدان گرانشی ، به استخراج یک هامیلتونی موثر برای سیستم مزبور مبادرت می ورزیم. سپس با تعیین شکل صریح عملگر تحول زمانی مربوط، به مطالعه اثر میدان گرانشی بر رفتار دینامیکی الگوی جینز – کامینگز خواهیم پرداخت. به ویژه اثر شتاب گرانشی بر ثابت جفت شدگی اتم با میدان تابشی درون کاواک و بسامد گذار اتمی را مورد توجه قرار می دهیم. نشان می دهیم که میدان گرانشی موثر بر اتم علاوه بر بروز یک جابجائی دوپلری در بسامد گذار اتمی، به یک ثابت جفت شدگی وابسته به زمان میان اتم و میدان تابشی می انجامد.

Influence of gravitational field on the dynamical behavior of the Jaynes-Cummings model in the dispersive regime

Mohammadi, Majid[1,2]; Naderi, Mohammad Hossein[3]; Soltanolketabi, Mahmood[3]
[1] *physics Department, Science and Research Campus Islamic Azad University, Tehran, Iran*
[2] *Physics Department, Shahreza Islamic Azad University, Shahreza, Isfahan, Iran*
[3] *Quantum Optics Group, University of Isfahan, Isfahan, Iran*

Abstract

In this paper we investigate the dynamical behavior of the dispersive Jaynes-Cummings model in the presence of a homogeneous gravitational field. For this purpose, based on su(2) algebra as the dynamical symmetry group of the model, we first derive an effective Hamiltonian describing the dispersive atom-field interaction in the presence of gravitational field. By finding an explicit form for the corresponding time evolution operator, we then explore the influence of gravitation on the atom-field coupling and detuning parameter. We show that due to the gravitational field the atomic transision frequency experiences a Doppler shift and the atom-field coupling becomes time-dependent.

PACS No: 32

مقدمه

ا لگوی جینز – کامینگز [۱] که به توصیف کوانتومی بر هم کنش تک اتم دو ترازی با میدان الکترومغناطیسی تک مدی درون کاواک می پردازد موضوع شمار چشمگیری از پژوهش های اخیر در زمینه های فیزیک لیزر و اپتیک کوانتومی را تشکیل می دهد. پیش بینی های نظری این الگو علاوه بر این که به روشنی نشانگر برخی شباهت ها و تفاوت های میان دینامیک کوانتومی و نیمه کلاسیک بر هم کنش تک اتم با فوتون است بیانگر بروز برخی رفتارهای کاملا کوانتومی، مانند نابودی و باز آفرینش دوره ای جمعیت ترازهای اتمی [۲]، چلاندگی مولفه های کوادراتوری میدان تابشی [۳] وآمار زیر پواسونی شمارش فوتون ها [٤] است. در حال حاضر، میزرهای تک اتمی [٥] از جمله برپایش های آزمایشگاهی به شمار می آیند که امکان آزمون تجربی نتایج الگوی مزبور را فراهم آورده اند. علاوه بر این، نتایج الگوی جینز- کامینگز در عرصه های متنوعی همچون اطلاع رسانی کوانتومی [٦]، تله اندازی اتم ها و یون ها [٧]، اندازه گیری های غیر مخرب کوانتمی [٨]، سرد سازی لیزری [٩] و تداخل سنجی اتمی [١٠] کاربردهای قابل توجهی را به خود اختصاص داده اند. در فرآیند های سرد

سازی و تداخل سنجی اتمی، باریکه های اتمی با سرعت های خیلی پایین تولید می شوند [۱۰]. واضح است که برای اتم های متحرک با سرعت هائی از حدود چند سانتی متر بر ثانیه تا چند متر بر ثانیه در یک بازه ی زمانی از مرتبه 10^{-4} ثانیه، اثر شتاب گرانشی چشم پوشیدنی نیست [۱۱]. بنابراین مطالعه ی تحول سیستم برهم کنشی اتم و میدان تابشی در حضور میدان گرانشی زمین از اهمیت ویژه ای برخوردار است. در واقع، چون هر آزمایش اپتیکی در آزمایشگاه در یک چارچوب غیر لخت انجام می شود، ارزیابی اثر شتاب گرانشی زمین بر برونداد فیزیکی این آزمایش مهم است. ساختار هامیلتونی موثر و تحول زمانی برهم کنش اتم دو ترازی با میدان لیزر (میدان کلاسیکی) در حضور میدان گرانشی در مرجع [۱۲] مطالعه شده است. در این مقاله، با انگیزه ی توسعه ی مطالعات قبلی در زمینه ی اثر حرکت اتم بر دینامیک کوانتومی الگوی جینز – کامینگز، به مطالعه ی برهم کنش اتم با میدان تابشی درون کاواک در حضور میدان گرانشی و در حد وادنیدگی[۱] بزرگ (رژیم پاشنده) می پردازیم. برای این منظور، با به کار گیری گروه su(2) [۱۳] به عنوان گروه تقارن دینامیکی سیستم مورد مطالعه ابتدا به تعیین شکل هامیلتونی موثر می پردازیم. سپس با استفاده از شکل صریح عملگر تحول زمانی به مطالعه ی اثر میدان گرانشی بر برخی پارامتر های مشخصه ی الگوی جینز – کامینگز، مانند ثابت جفت شدگی اتم با میدان تابشی و بسامد وادنیدگی، خواهیم پرداخت.

رفتار دینامیکی الگوی جینز– کامینگز پاشنده در حضور میدان گرانشی

برهم کنش میان تک اتم دو ترازی متحرک (با تراز برانگیخته ی $|e\rangle$ و تراز پایه ی $|g\rangle$) و میدان تابشی تک مدی درون کاواک در حضور میدان گرانشی در چارچوب الگوی جینز – کامینگز و در تقریب امواج چرخان توسط هامیلتونی زیر توصیف می شود

$$\hat{H} = \frac{\hat{\vec{p}}^2}{2M} - M\vec{g}.\hat{\vec{x}} + \hbar\omega_c\left(\hat{a}^+\hat{a} + \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2}\hbar\omega_{eg}\hat{\sigma}_z + \hbar\lambda\left[\exp\left(-i\vec{q}.\hat{\vec{x}}\right)\hat{a}^+\hat{\sigma}_- + \exp\left(i\vec{q}.\hat{\vec{x}}\right)\hat{\sigma}_+\hat{a}\right] \quad (۱)$$

که در آن، $\hat{a}$ و $\hat{a}^+$ به ترتیب، عملگرهای نابودی و خلق فوتون با بسامد ω_c، $\vec{q}$ بردار موج الکترومغناطیسی، و $\hat{\sigma}_\pm$ عملگرهای بالا برنده و پایین برنده ی اتم دو ترازی با بسامد گذار ω_{eg} و λ ثابت جفت شدگی اتم با میدان تابشی است. به علاوه، $\hat{\vec{x}},\hat{\vec{p}}$ به ترتیب، عملگر های تکانه و مکان حرکت مرکز جرم اتم و g شتاب گرانشی زمین را نشان می دهند. آشکار است که عملگر

$$\hat{K} = \hat{a}^+\hat{a} + |e\rangle\langle e|, \quad (۲)$$

یک ثابت حرکت است، $[\hat{K},\hat{H}] = 0$. به علاوه، عملگر $\hat{a}\hat{\sigma}_+$ با $\hat{K}$ جابه جا پذیر است . بر این اساس، عملگرهای زیر را معرفی می کنیم

$$\hat{S}_0 = \frac{1}{2}\left(|e\rangle\langle e| - |g\rangle\langle g|\right), \hat{S}_+ = \hat{a}|e\rangle\langle g|\frac{1}{\sqrt{\hat{K}}}, \quad \hat{S}_- = \frac{1}{\sqrt{\hat{K}}}|g\rangle\langle e|\hat{a}^+. \quad (۳)$$

عملگر های $\hat{S}_\pm,\hat{S}_0$ روابط جابه جا ئی زیر را برآورده می کنند

$$[\hat{S}_0,\hat{S}_\pm] = \pm\hat{S}_\pm, [\hat{S}_-,\hat{S}_+] = -2\hat{S}_0. \quad (۴)$$

به بیان دیگر، $\hat{S}_\pm,\hat{S}_0$ مولدهای جبر su(2) هستند. بدین ترتیب، هامیلتونی(۱) بر حسب مولد های جبر su(2) به شکل زیردرمی آید

$$\hat{H} = \frac{\hat{\vec{p}}^2}{2M} - M\vec{g}.\hat{\vec{x}} + \hbar\omega_c\hat{K} + \frac{1}{2}\hbar\Delta\hat{S}_0 + \hbar\lambda\left[\exp\left(-i\vec{q}.\hat{\vec{x}}\right)\hat{S}_- + \exp\left(i\vec{q}.\hat{\vec{x}}\right)\hat{S}_+\right] \quad (۵)$$

که در آن

$$\Delta = \omega_{eg} - \omega_c, \quad (۶)$$

وادنیدگی معمولی میان میدان تابشی و اتم است. اکنون به بررسی رفتاردینامیکی سیستم مورد مطالعه که توسط هامیلتونی (۵) توصیف می شود می پردازیم. برای این منظور عملگر تحول زمانی متناظر را به صورت زیر بیان می کنیم

$$\hat{u}(t) = \exp\left(\frac{iM\vec{g}.\hat{\vec{x}}t}{\hbar}\right)\hat{v}^+\hat{u}_e(t)\hat{v}, \quad (۷)$$

که در آن چنین داریم

$$\hat{v} = \exp\left(-i\vec{q}.\hat{\vec{x}}\hat{S}_0\right), \quad (۸)$$

$$\hat{u}_e = \exp\left(\frac{-i\hat{H}_e t}{\hbar}\right), \quad (۹)$$

[۱] detuning

با انجام محاسبات معمول می توان نشان داد که عملگر $\hat{u}_e$ معادله شرودینگر زیر را برآورده می کند

$$i\hbar\frac{\partial\hat{u}_e}{\partial t}=\hat{H}_e\hat{u}_e, \qquad (۱۰)$$

که در آن، هامیلتونی مربوط با عبارت زیر داده می شود

$$\hat{H}_e=\frac{\hat{p}^2}{2M}-\hbar\hat{\Delta}\left(\hat{\vec{p}},\vec{g}\right)\hat{S}_0+\frac{1}{2}Mg^2t^2+\vec{g}.\hat{\vec{p}}t +\hbar\lambda\left(\sqrt{\hat{K}}\hat{S}_-+\sqrt{\hat{K}}\hat{S}_+\right)+\hat{H}_0, \qquad (۱۱)$$

و

$$\hat{H}_0=\hbar\omega_c\hat{K}-\frac{\hbar}{2}\Delta\hat{S}_0-\frac{q^2\hbar^2}{2M}\hat{S}_0+\frac{q^2\hbar^2}{8M}, \qquad (۱۲)$$

در اینجا عملگر

$$\hat{\Delta}\left(\hat{\vec{p}},\vec{g}\right)=\omega_c-\left(\omega_{eg}+\frac{\vec{q}.\hat{\vec{p}}}{M}+\vec{q}.\vec{g}t+\frac{q^2\hbar}{2M}\right), \qquad (۱۳)$$

را به عنوان وادنیدگی موثر که دستخوش جابجائی دوپلری گردیده است شناسائی می کنیم. در واقع حضور گرانش و حرکت اتم سبب تغییرشکل وادنیدگی میان اتم ومیدان تابشی می گردد. معیار زمانی که اثر گرانش را مشخص می کند به صورت $\tau_a=\frac{1}{\sqrt{\vec{q}\cdot\vec{g}}}$ تعریف می شود. برای یک لیزر اپتیکی مقدار این پارامتر حدود $۱۰^{-۴}$ ثانیه است. اکنون با گذار به تصویر برهم کنش چنین داریم

$$\hat{u}_e=\exp\left(\frac{-i\hat{H}_0t}{\hbar}\right)\hat{\tilde{u}}, \qquad (۱۴)$$

به طوری که

$$i\hbar\frac{\partial\hat{\tilde{u}}}{\partial t}=\hat{\tilde{H}}\hat{\tilde{u}}, \qquad (۱۵)$$

و در آن

$$\hat{\tilde{H}}=\frac{\hat{p}^2}{2M}-\hbar\hat{\Delta}\left(\hat{\vec{p}},\vec{g}\right)\hat{S}_0+\frac{1}{2}Mg^2t^2+\vec{g}.\hat{\vec{p}}t +\hbar\left(\kappa\sqrt{\hat{K}}\hat{S}_-+\kappa^*\sqrt{\hat{K}}\hat{S}_+\right). \qquad (۱۶)$$

در اینجا، κ ضریب جفت شدگی وابسته به زمان است

$$\kappa=\lambda\exp\left(\frac{it}{\hbar}\left(\hat{\Delta}\left(\hat{\vec{p}},\vec{g}\right)+\frac{\hbar q^2}{M}\right)\right). \qquad (۱۷)$$

هامیلتونی (۱٦) به شکل هامیلتونی الگوی جینز – کامینگز استاندارد است تنها با این تفاوت که در آن، وادنیدگی به تکانه، شتاب گرانش و زمان وابسته است. اکنون هامیلتونی (۱٦) را در حد وادنیدگی بزرگ (رژیم پاشنده) یعنی، $|\delta|>>\sqrt{\langle\hat{a}^+\hat{a}\rangle}$ با $\delta=\omega_c-\omega_{eg}-\frac{q^2\hbar}{2M}$، را در نظر می گیریم. فرض می کنیم در ابتدا اتم در حالت زمینه به سر می برد. به دلیل عدم تبادل انرژی میان میدان تابشی ودرجه آزادی داخلی اتم، حالت برانگیخته ی اتم هرگز جمعیت دار نمی شود و بدین لحاظ از گسیل خود به خود اتم می توان چشم پوشید. هامیلتونی موثر را در حد پاشنده به شکل زیر به دست می آوریم

$$\hat{H}_{eff}=\frac{\hat{p}^2}{2M}+\hat{\vec{p}}.\vec{g}t+\frac{1}{2}Mg^2t^2+\hbar\Omega\left(\hat{\vec{p}},\vec{g}\right)\hat{a}^+\hat{a}, \qquad (۱۸)$$

که در آن

$$\hat{\Omega}\left(\hat{\vec{p}},\vec{g}\right)=\frac{|\kappa|^2}{\hat{\Delta}\left(\hat{\vec{p}},\vec{g}\right)}, \qquad (۱۹)$$

بسا مد وابسته به تکانه برای نوسانگر هماهنگ تعبیر می شود.

حال می توان تحول دینامیکی سیستم اتم – میدان را در حضور گرانش، توسط معادله ی شرودینگر زیر توصیف کرد

$$i\hbar\frac{\partial|\psi\rangle}{\partial t}=\hat{H}_{eff}|\psi\rangle, \qquad (۲۰)$$

که در آن

$$|\psi\rangle=|\psi_g(t)\rangle\otimes|g\rangle. \qquad (۲۱)$$

در حد پاشنده، ، حالت حرکت مرکز جرم و میدان درون کاواک توسط $|\psi_g(t)\rangle$ توصیف می شود. فرض می کنیم در t=0 ، میدان درون کاواک در حالت همدوس $|\alpha\rangle$ ترتیب یافته است. عملگر تحول زمانی

$$\hat{u}(t)=\exp\left(\frac{-i}{\hbar}\int_0^t dt'\hat{H}_{eff}(t')\right), \qquad (۲۲)$$

را روی حالت اولیه ی

$$|\psi_g(t=0)\rangle=\left(\int d^3p\phi_g(\vec{p})|\vec{p}\rangle\right)\otimes|\alpha\rangle, \qquad (۲۳)$$

اعمال می کنیم، که در آن $\phi_g(\vec{p})$ دامنه ی احتمال حرکت مرکز جرم اتم در حالت زمینه ودر نمایش تکانه($\hat{\vec{p}}|\vec{p}\rangle=\vec{p}|\vec{p}\rangle$)است.

وقتی اتم بعد از زمان برهم کنش τ کاواک را ترک می کند، بردار حالت به شکل حالت در هم تنیده ی زیر در می آید

$$\begin{aligned}\left|\psi_g(t=\tau)\right\rangle &= \hat{u}(t=\tau)\left|\psi_g(t=0)\right\rangle \\ &= \int d^3p\left[\exp\left(\frac{-i\tau p^2}{2M\hbar}\right)\exp\left(\frac{-i\vec{p}.\vec{g}\tau}{2\hbar}\right)\right] \\ &\times\left[\exp\left(\frac{-iMg^2\tau^3}{6\hbar}\right)\phi_g(\vec{p})\left|\vec{p}\right\rangle\right] \\ &\otimes\left[\left|\alpha\exp\left(-i\Omega(\vec{p},\vec{g})\tau\right)\right\rangle\right]\end{aligned} \tag{۲۴}$$

حال اثر میدان گرانشی را بر تحول دینامیکی سیستم در دو حالت حدی بررسی می کنیم. در حد $t \ll \tau_a$ ، اثرگرانش بسیار ناچیز است، یعنی $\vec{q}.\vec{g}$ خیلی کوچک است، به عبارت دیگر، تکانه از پرتو ی لیزر به آرامی به اتم منتقل می شود زیرا شتاب یا خیلی کوچک است یا شتاب بر پرتو لیزر عمود است. در این وضعیت حدی، بردار حالت به شکل زیر در می آید

$$\begin{aligned}\left|\psi_g(t=\tau)\right\rangle &= \int d^3p\left[\exp\left(\frac{-i\tau p^2}{2M\hbar}\right)\right] \\ &\times\left[\phi_g(\vec{p})\left|\vec{p}\right\rangle\right]\otimes\left[\left|\alpha\exp\left(-i\Omega(\vec{p})\tau\right)\right\rangle\right],\end{aligned} \tag{۲۵}$$

که در آن

$$\Omega(\vec{p}) = \frac{|\kappa|^2}{\Delta(\vec{p})}, \tag{۲۶}$$

$$\Delta(\vec{p}) = \omega_c - \left(\omega_{eg} + \frac{\vec{q}.\vec{p}}{M} + \frac{q^2\hbar}{2M}\right), \tag{۲۷}$$

به ترتیب بسا مد تغییر شکل یافته ی میدان تابشی و وادنیدگی جابجا شده ی دوپلری مستقل از میدان گرانشی را نشان می دهند. در وضعیت حدی دوم، $t \gg \tau_a$ است ، چون در اینجا از اتلاف تکانه ناشی از گسیل خود به خود صرفنظر می شود، اتم ها توسط گرانش زمین شتاب می گیرند به طوری که سرعت اتم ها افزایش می یابد. در این وضعیت حدی، وادنیدگی جابجا شده ی دوپلری در (۱۳) و بسا مد تغییر شکل یافته ی میدان تابشی در (۲۶) وابسته به میدان گرانشی است.

نتیجه گیری

در این مقاله، به بررسی اثر گرانش بر رفتار دینامیکی برهم کنش اتم متحرک با میدان تابشی درون کاواک در چارچوب الگوی جینز- کامینگز پرداختیم. با در نظر گرفتن رژیم پاشنده دریافتیم که میدان گرانشی علاوه بر این که سبب بروز یک جابجائی دوپلری در بسامد گذار اتمی می گردد به وابستگی زمانی ثابت جفت شدگی اتم با میدان تابشی نیز منجر می شود. گفتنی است که الگوی جینز – کامینگز پا شنده به عنوان یکی از طرحواره های کوانتوم اپتیکی تولید حالت های گربه ی شرودینگر [۱٤] مورد توجه قرار گرفته است. از این لحاظ، بررسی حاضر نقطه ی شروع مناسبی برای مطالعه ی اثر میدان گرانشی بر رفتار دینامیکی حالت های کوانتومی مزبور و به ویژه جنبه های همدوسی کوانتومی آنها به حساب می آید.

سپاسگزاری

از همکاری آقای دکتر محمد رضا ابوالحسنی صمیمانه تشکر می‌کنیم. اینکار با پشتیبانی معنوی گروه فیزیک دانشگاه آزاد اسلامی واحد علوم وتحقیقات انجام شد.

مرجع‌ها

[۱] E.T.Jaynes and Cummings; *Proc.IEEE* **51** (1963) 89.
[۲] J.H.Eberly, J.J.Sanchez and N.B.Narozhny; *Phys.Rev.Lett.* **44** (1980) 1323.
[۳] J.R.Kuklinski and J.Madajczyk; *Phys.Rev.A* **37** (1988) 3175.
[٤] L.Lugiato, M.O.Scully and H.Walther; *Phys.Rev.A* **36** (1987) 740.
[٥] G.Rempe, H.Walther and N.Klein; *Phys.Rev.Lett.* **58** (1987) 353.
[٦] A.S.Soronsen and K.Molmer; *Phys.Rev.Lett.* **91** (2003) 097905.
[٧] J.I.Cirac, R.Blatt, A.S.Parkins, and P.Zoller; *Phys.Rev.Lett.* **70** (1993) 762.
[٨] W.J.Munro, Kao Nemoto, R.G.Beau Soleil, and T.P.Spiller; *Phys.Rev.A* **71** (2005) 033819.
[٩] D.M.Meekhof, C.Monroe, B.E.King, W.M.Itano, and D.J.Wineland,; *Phys.Rev.Lett.* **76** (1996) 1796.
[١٠] C.Adams, M.Sigel, and J.Mlynek; *Phys.Rep.* **240** (1994) 143.
[١١] A.Kastberg, W.D.Philips, S.L.Rolston. R.J.C.Spreeuw, and P.S.Jessen; *Phys.Rev.Lett.* **74** (1995) 1542.
[١٢] S.Yu,H.Rauch, and Y.Zhang; *Phys.Rev.A* **54** (1995) 2585.
[١٣] R.L.de Matos Filho and W.Vogel; *Phys.Rev.Lett.* **76** (1996) 608.
[١٤] C.C.Gerry; *Phys.Rev.A* **59** (1999) 4095.