۱۶ الی ۲۱ اسفند ۱۳۸۶
انجمن کامپیوتر ایران
Computer Society of Iran
پوستر

یافتن استراتژی غالب در بازی‌های Blotto با استفاده از اتوماتاهای یادگیر

فرناز ابطحی
دانشکده مهندسی کامپیوتر و فناوری اطلاعات
دانشگاه صنعتی امیرکبیر، تهران، ایران
abtahi@aut.ac.ir

محمدرضا میبدی
دانشکده مهندسی کامپیوتر و فناوری اطلاعات
دانشگاه صنعتی امیرکبیر، تهران، ایران
mmeybodi@aut.ac.ir

سعید شیری
دانشکده مهندسی کامپیوتر و فناوری اطلاعات
دانشگاه صنعتی امیرکبیر، تهران، ایران
shiry@aut.ac.ir

چکیده: در این مقاله، رویکردی مبتنی بر اتوماتاهای یادگیر برای یافتن استراتژی غالب در بازی‌های Blotto ارائه می‌گردد. اهمیت این دسته از بازی‌ها در تئوری بازی از دو جهت است. اولاً این بازی‌ها در دنیای واقعی برای مدل‌سازی فرآیندهایی به‌کار می‌روند که در آن‌ها برای غلبه بر حریف، نیاز به توزیع بهینه منابع محدود بین چندین کار وجود دارد. ثانیاً رویکردی که در این بازی‌ها برای یافتن استراتژی غالب مورد استفاده قرار می‌گیرد را می‌توان برای مدل کردن هر فرآیند چندعامله رقابتی دیگر که دارای استراتژی غالب برای هریک از عامل‌ها می‌باشد به‌کار برد. با دانستن استراتژی غالب می‌توان تضمین کرد که عامل، همواره سودی بیشتر یا مساوی با سایر عامل‌ها به‌دست خواهد آورد. در روش پیشنهادی در این مقاله، هریک از بازیکنان دارای یک اتوماتای یادگیر می‌باشد که از آن، برای یادگیری و تصمیم‌گیری درمورد انتخاب اعمال کمک می‌گیرد. آزمایشات انجام‌شده نشان می‌دهند که با استفاده از این روش، استراتژی بازیکنان مجهز به اتوماتای یادگیر به‌تدریج به استراتژی غالب همگرا شده و این بازیکنان قادر به یافتن بهترین حالت تقسیم منابع و برد در بازی خواهند بود.

واژه های کلیدی: بازی‌های Blotto، یادگیری تقویتی، اتوماتای یادگیر، استراتژی غالب.

۱- مقدمه

در تئوری بازی، غلبه هنگامی روی می‌دهد که یک استراتژی برای یک بازیکن، بدون توجه به این‌که رقبا چگونه بازی کنند، از سایر استراتژی‌ها بهتر بوده و سود بیشتری را نصیب آن بازیکن نماید. این استراتژی، استراتژی غالب نامیده می‌شود [3]. این مفهوم در بسیاری از سیستم-های چندعامله رقابتی، بازی‌ها و مسائل دنیای واقعی به یافتن مناسب-ترین راه حل مسئله کمک می‌کند، زیرا در صورت وجود استراتژی غالب، بازیکن قادر است در تمام تعادل‌های Nash بازی، آن استراتژی را اجرا می‌نماید و اطمینان داشته باشد که در بدترین شرایط نتیجه‌ای برابر با رقبای خود به‌دست خواهد آورد.

گروهی از بازی‌های رقابتی که در مبحث تئوری بازی مطرح بوده و با استفاده از آن‌ها به‌خوبی می‌توان مفهوم استراتژی غالب را مورد مطالعه قرار داد، بازی‌های Blotto می‌باشند [1,2,8,9,10,11]. این بازی‌ها، دسته‌ای از بازی‌های ماتریسی جمع صفر را شامل می‌شوند که در آن، بازیکنان باید به‌طور هم‌زمان منابع محدودی را بین چندین کار یا شیء توزیع نمایند و امتیاز هر بازیکن برابر مجموع امتیازی خواهد بود که از هر کار یا شیء به‌دست می‌آورد.

بازی‌های Blotto براساس یک شخصیت خیالی به نام Colonel Blotto نامگذاری شده‌اند که در جنگ وظیفه توزیع بهینه سربازان بین N میدان مبارزه را به‌عهده داشته است، با دانستن این‌که: ۱) در هر میدان ، هر کدام از طرفین جنگ که سرباز بیشتری به آن محل اختصاص داده است پیروز خواهد شد، ۲) هیچ‌یک از دو طرف اطلاع ندارند که رقیب چه تعداد سرباز را به هر میدان اختصاص می‌دهد، ۳) طرفی که در اکثر میدان‌های جنگ بر حریف پیروز شود، در کل برنده جنگ خواهد بود.

انواع مختلفی از بازی‌های Blotto وجود دارد. یکی از نمونه‌های ممکن که دارای دو بازیکن می‌باشد به این صورت است که هریک از بازیکن‌ها سه عدد را روی کاغذ می نویسند، به‌طوری که مجموع این سه عدد برابر عدد معینی شود. این کار بدون اطلاع از اعدادی که طرف مقابل می‌نویسد صورت می‌گیرد. فرض می‌کنیم بازیکن‌ها مجاز به نوشتن جایگشت‌های مختلف سه عددِ مشخص نمی‌باشند. مثلاً (۱،۲،۳) و (۱،۲،۳) دو انتخاب به‌حساب نمی‌آیند. برای محاسبه امتیاز هر بازیکن، درصورتی‌که بیش از یک عدد از سه عددِ بازیکن، از یکی از سه عددی که حریف نوشته بزرگتر باشد، یک امتیاز مثبت به بازیکن تعلق خواهد گرفت. در غیر این صورت اگر کمتر از دو عدد از اعداد بازیکن دارای این ویژگی باشد، بازیکن یک امتیاز منفی می‌گیرد. و درصورتی‌که تمام اعداد بازیکن با اعداد رقیب مساوی باشد، بازیکن هیچ امتیازی دریافت نمی‌کند. اگر مجموع سه عدد بایست برابر ۶ شود، با توجه به قانون بازی، جدول(۱) ماتریس نتیجه برای بازیکن اول را نشان می‌دهد:

جدول (۱): ماتریس نتیجه برای بازیکن اول در یک نمونه بازی Blotto

	(۱،۱،۴)	(۱،۲،۳)	(۲،۲،۲)
(۱،۱،۴)	۰	-۱	-۱
(۱،۲،۳)	۱	۰	-۱
(۲،۲،۲)	۱	۱	۰

در ماتریس بالا، سطرها اعمال بازیکن اول و ستون‌ها اعمال بازیکن دوم را نشان می‌دهند. از آن‌جایی‌که مجموع امتیازات دو بازیکن برابر با صفر است، ماتریس نتیجه بازیکن دوم نیز مشابه همین ماتریس است، تنها با این تفاوت که علامت امتیازات برای بازیکن دوم معکوس خواهد

شد. با توجه به ماتریس نتایج، بهترین استراتژی (تعادل Nash) در اینجا (۲،۲،۲) می‌باشد وانتخاب آن، همواره منجر به دریافت امتیاز بیشتر یا مساوی با حریف می‌گردد.

از بازی‌های Blotto برای مدل‌سازی برخی از مسائل دنیای واقعی استفاده شده است. برای مثال در [10]، این بازی برای مدل‌کردن انتخابات سال ۲۰۰۰ آمریکا که یکی از نزدیک‌ترین رقابت‌ها در تاریخ انتخابات ریاست جمهوری این کشور بوده به‌کار رفته است. همچنین در [11]، از این بازی در مبارزه با تروریسم استفاده شده و این کار با محاسبه احتمال موفقیت تروریست در حمله خود، از طریق مدل‌سازی حمله و دفاع توسط بازی Blotto صورت گرفته است.

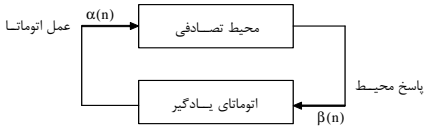
در بازی بالا و یا در هر فرآیند رقابتی دیگر، بسیار مطلوب است که بتوان استراتژی‌های غالب را مشخص کرد. بدین منظور می‌توان از تکنیک‌های یادگیری استفاده نمود. در این‌گونه بازی‌ها، بازیکنان هم‌زمان درحال یادگیری می‌باشند و سود هر عامل، علاوه بر اعمال خود او به اعمال سایر عامل‌ها نیز وابسته است. . به همین دلیل، محیط بازی غیرقطعی بوده و مناسب‌ترین روش برای یادگیری، استفاده از تکنیک‌های مبتنی بر یادگیری تقویتی می‌باشد. در بازی‌های ماتریسی، یادگیری از طریق تکرار بازی به دفعات متعدد صورت می‌گیرد. در هر تکرار، هریک از بازیکنان عملی را انتخاب کرده و انجام می‌دهد. سپس با توجه به عمل خود و اعمال سایر بازیکنان، امتیازی به بازیکن تعلق می‌گیرد. باتوجه به این امتیاز، بازیکن یاد می‌گیرد که عمل انجام شده تا چه حد مناسب بوده است و نتیجه این یادگیری را در دفعات بعدی اجرای بازی به‌کار می‌برد.

در این مقاله، رویکردی مبتنی بر اتوماتای یادگیر برای پیاده‌سازی بازی‌های Blotto ارائه می‌گردد. اتوماتای یادگیر که بر مبنای یادگیری تقویتی عمل می‌کند، ابزاری مناسب برای کمک به فرآیند یادگیری عامل‌ها در سیستم‌های چندعامله ازجمله سیستم‌های رقابتی است. در رویکرد پیشنهادی، هریک از بازیکنان در بخش یادگیری خود دارای یک اتوماتای یادگیر می‌باشد. اتوماتا به بازیکن کمک می‌کند تا در هر مرحله، باتوجه به نتایجی که تا به حال به‌دست آمده، بهترین عمل را انتخاب نماید و سپس براساس پاداش یا جریمه‌ای که در اثر انجام این عمل دریافت می‌کند، احتمال انجام آن را در مراحل بعدی بازی افزایش یا کاهش دهد. آزمایشات انجام‌شده نشان می‌دهند که با استفاده از این روش، استراتژی بازیکنان مجهز به اتوماتای یادگیر به‌تدریج به استراتژی غالب همگرا می‌گردد. استراتژی غالب که در بازی‌های Blotto به‌معنای بهترین حالت تخصیص منابع محدود به چندین کار می‌باشد، همواره بهترین نتیجه را برای بازیکن درپی خواهد داشت.

ادامه مقاله بدین‌صورت سازماندهی شده است. در بخش۲ مروری بر اتوماتای یادگیر و الگوریتم یادگیری مورد استفاده در آن خواهیم داشت. بخش۳ شامل آزمایشات انجام‌شده برای بررسی عملکرد روش پیشنهادی می‌باشد. در بخش۴ نتایج حاصل از به‌کارگیری روش ارائه‌شده برای حل مسئله تخصیص بهینه منابع در بازی‌های Blotto را برمی‌شماریم.

۲- اتوماتای یادگیر

اتوماتای یادگیر [4,5,6,7]، ماشینی است که می‌تواند تعدادی متناهی عمل را انجام دهد. هر عمل انتخاب شده توسط یک محیط احتمالی ارزیابی می‌شود، نتیجه ارزیابی در قالب سیگنالی مثبت یا منفی به اتوماتا داده می‌شود و اتوماتا از این پاسخ در انتخاب عمل بعدی تأثیر می‌گیرد. هدف نهایی این است که اتوماتا یاد بگیرد تا از بین اعمال خود، بهترین عمل را انتخاب کند. بهترین عمل، عملی است که احتمال دریافت پاداش از محیط را به حداکثر برساند. کارکرد اتوماتای یادگیر در تعامل با محیط، در شکل (۱) مشاهده می‌شود.



شکل(۱): ارتباط بین اتوماتای یادگیر و محیط [5]

محیط را می‌توان توسط سه‌تایی $E \equiv \{\alpha, \beta, c\}$ نشان‌داد که $\alpha \equiv \{\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_r\}$ مجموعه‌ورودی‌ها، $\beta \equiv \{\beta_1, \beta_2, ..., \beta_m\}$ مجموعه‌خروجی‌ها، و $c \equiv \{c_1, c_2, ..., c_r\}$ مجموعه احتمال‌های جریمه می‌باشد. هرگاه β مجموعه‌ای دوعضوی باشد، محیط از نوع P است. در چنین محیطی $\beta_1 = 1$ به عنوان جریمه و $\beta_2 = 0$ به عنوان پاداش در نظر گرفته می‌شود. در محیط از نوع Q، $\beta(n)$ می‌تواند به‌طور گسسته یک مقدار از مقادیر محدود در فاصله [۰،۱] را اختیار کند و در محیط از نوع S، $\beta(n)$ متغیر تصادفی در فاصله [۰،۱] است. c_i احتمال این‌که عمل α_i نتیجه نامطلوب داشته باشد می‌باشد. در محیط ایستا، مقادیر c_i بدون تغییر می‌مانند، حال آن‌که در محیط غیرایستا این مقادیر در طی زمان تغییر می‌کنند.

اتوماتای یادگیر با ساختار ثابت توسط پنج‌تایی $\{\alpha, \beta, F, G, \phi\}$ نشان داده می‌شود که در آن، $\alpha \equiv \{\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_r\}$ مجموعه عمل‌های اتوماتا، $\beta \equiv \{\beta_1, \beta_2, ..., \beta_r\}$ مجموعه ورودی‌های اتوماتا، $\phi(n) \equiv \{\phi_1, \phi_2, ..., \phi_k\}$ مجموعه وضعیت‌های داخلی اتوماتا در لحظه n، $F: \phi \times \beta \to \phi$ تابع تولید وضعیت جدید اتوماتا و $G: \phi \to \alpha$ تابع خروجی می‌باشد که وضعیت کنونی اتوماتا را به خروجی بعدی می‌نگارد.

اتوماتای یادگیر با ساختار متغیر را می‌توان توسط چهارتایی $\{\alpha, \beta, p, T\}$ نشان داد که $\alpha \equiv \{\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_r\}$ مجموعه اعمال اتوماتا، $\beta \equiv \{\beta_1, \beta_2, ..., \beta_r\}$ مجموعه ورودی‌های اتوماتا، $p = \{p_1, ..., p_r\}$ بردار احتمال انتخاب هریک از عمل‌ها و $p(n+1) = T[\alpha(n), \beta(n), p(n)]$ الگوریتم یادگیری می‌باشد. الگوریتم زیر یک نمونه از الگوریتم‌های یادگیری خطی است. فرض می‌کنیم عمل α_i در مرحله nام انتخاب شود.

- پاسخ مطلوب از محیط

$$p_i(n+1) = p_i(n) + a[1 - p_i(n)]$$
$$p_j(n+1) = (1-a)p_j(n) \quad \forall j \quad j \neq i \qquad (۱)$$

- پاسخ نامطلوب از محیط

$$p_i(n+1) = (1-b)p_i(n)$$
$$p_j(n+1) = (b/r-1) + (1-b)p_j(n) \quad \forall j \quad j \neq i \qquad (۲)$$

در روابط بالا، a پارامتر پاداش و b پارامتر جریمه می‌باشد. با توجه به مقادیر a و b سه حالت را می‌توان درنظر گرفت: اگر a و b با هم برابر باشند، الگوریتم را L_{RP}، هنگامی‌که b از a خیلی کوچکتر باشد، الگوریتم را $L_{R\varepsilon P}$ و اگر b مساوی صفر باشد آن را L_{RI} می‌نامیم.

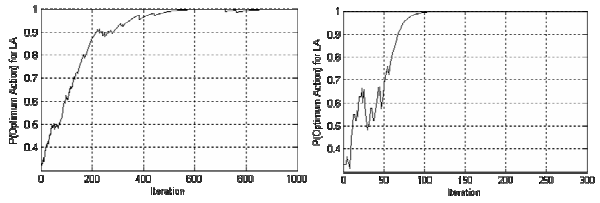
۳- یافتن استراتژی غالب در بازی Blotto با استفاده از اتوماتای یادگیر

هدف از این بخش یادگیری استراتژی غالب در بازی Blotto است، به‌طوری‌که بازیکن با اجرای آن، تحت هر شرایطی و بدون توجه به روش بازی حریف در بازی پیروز شود. برای پیاده‌سازی بازی از نمونه‌ای که در مقدمه توضیح داده‌شد، یعنی بازی اعداد استفاده کرده‌ایم. در رویکردی که در این بخش برای حل این بازی ارائه می‌دهیم، بازیکنان از اتوماتای یادگیر در فرآیند یادگیری و تصمیم‌گیری خود برای انتخاب بهترین عمل کمک می‌گیرند.

در این روش، هر بازیکن دارای یک اتوماتای یادگیر با ساختار متغیر می‌باشد. همان‌طور که در بخش۲ گفته شد، اتوماتای یادگیر با ساختار متغیر با چهارتایی $\{\alpha, \beta, p, T\}$ نشان داده می‌شود. برای مدل‌کردن این بازی با اتوماتای یادگیر، α برابر با مجموعه اعمال هر عامل، یعنی {(۱،۱،۴)، (۱،۲،۳)، (۲،۲،۲)} قرار داده می‌شود. β برابر با امتیازی درنظر گرفته می‌شود که بازیکن در هر مرحله دریافت می‌کند. p بردار احتمال اعمال اتوماتا است که در ابتدا مقادیر آن به ازاء تمام اعمال، یکسان درنظر گرفته می‌شود. T نیز نشان‌دهنده الگوریتم یادگیری می‌باشد که در پیاده سازی این بازی، از الگوریتم یادگیری خطی مطابق با روابط (۱) و (۲)، و با شمای L_{RP} استفاده شده‌است.

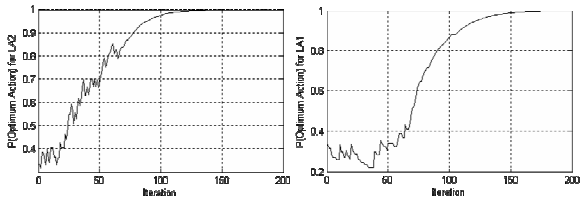
بازی به‌صورت تکراری و باتوجه به قانون بازی و ماتریس نتیجه در دفعات متعدد اجرا می‌گردد. در هر بار اجرای بازی، ابتدا اتوماتای یادگیر مربوط به هر بازیکن، مستقلاً یک عمل از مجموعه اعمال خود را با توجه به بردار احتمال انتخاب می‌کند. پس از اجرای اعمال توسط بازیکنان، باتوجه به ماتریس نتایج امتیازی به هریک تعلق می‌گیرد. با توجه به این امتیاز و با استفاده الگوریتم یادگیری اتوماتای یادگیر، بردار احتمال هر دو اتوماتا به‌روز می‌شود. این روند مرتباً تکرار می‌شود تا جایی که بردار احتمال اتوماتاها به پایداری برسد.

برای انجام آزمایش دو حالت را درنظر می‌گیریم. ابتدا حالتی را بررسی می‌کنیم که یکی از بازیکنان، دارای اتوماتای یادگیر است و بازیکن دیگر اعمال خود را به‌طور تصادفی انتخاب می‌نماید. همان‌طور که در نمودارهای شکل (۲) مشاهده می‌شود، احتمال انتخاب عمل بهینه توسط اتوماتا به سرعت به یک می‌رسد و استراتژی بازیکن به استراتژی غالب همگرا می‌گردد. مشاهده می‌کنیم که سرعت همگرایی و همواری نمودار به پارامتر پاداش، یعنی a وابسته است.



شکل(۲): تغییرات احتمال انتخاب عمل بهینه توسط بازیکن دارای اتوماتای یادگیر با نرخ یادگیری ۰/۱ (راست) و ۰/۰۱ (چپ)، درحالتی‌که فقط یکی از بازیکنان از اتوماتای یادگیر استفاده نماید.

در حالت دوم، در ساختار هر دو بازیکن از اتوماتای یادگیر استفاده می‌کنیم. در این وضعیت به دلیل این‌که بازیکنان به‌طور هم‌زمان درحال یادگیری هستند، همگرایی با سرعت کمتری صورت می‌گیرد؛ زیرا در هر بار تکرار بازی، هر بازیکن سعی می‌کند بهترین رفتاری که تا آن لحظه یاد گرفته است را از خود نشان دهد و انتخاب عملی با سود بیشتر را برای حریف مشکل می‌سازد. این مسئله در نمودارهای شکل(۳) قابل مشاهده می‌باشد. در این حالت نیز با کاهش پارامتر پاداش، همگرایی رفتار بازیکنان، کندتر شده ولی نوسانات کمتری از خود نشان می‌دهد.



شکل(۳): تغییرات احتمال انتخاب عمل بهینه توسط بازیکن۱ (راست) و بازیکن۲ (چپ) با نرخ یادگیری ۰/۱، در حالتی که هر دو بازیکن از اتوماتای یادگیراستفاده نمایند.

بازی مورد استفاده در آزمایش بالا، فقط دارای یک استراتژی غالب و تعادل $Nash$ بوده و تعداد اعمال در آن محدود به سه عمل می‌باشد. هنگامی‌که مسئله بزرگتر بوده و یا قانون بازی متفاوت باشد، مجموعه اعمال نیز بزرگتر خواهد بود و ممکن است چندین استراتژی غالب برای بازیکن وجود داشته باشد. برای بررسی تأثیر افزایش اندازه مجموعه اعمال و همین‌طور افزایش تعداد استراتژی‌های غالب، نوع دیگری از بازی را مطرح می‌نماییم. در این بازی نیز که بسیار شبیه به بازی قبل می‌باشد، دو بازیکن سه عدد را روی کاغذ می‌نویسند، به‌طوری‌که مجموع آن‌ها برابر با عدد معینی شود. این کار بدون اطلاع از انتخاب حریف صورت می‌گیرد. تفاوت این بازی با بازی قبل در این است که اولاً بازیکن‌ها مجاز به نوشتن جایگشت‌های مختلف سه عدد می‌باشند؛ به این معنا که مثلاً (۱،۱،۳) و (۳،۱،۱) دو انتخاب متفاوت به‌شمار می‌روند. ثانیاً در بازی جدید، هریک از سه عدد با عددی در همان جایگاه

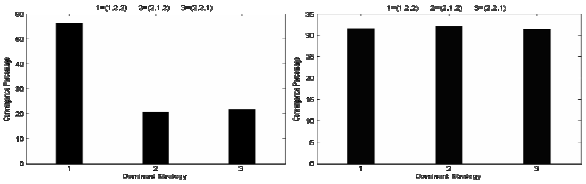
مقایسه می‌شود؛ یعنی عدد اول بازیکن با عدد اول حریف، عدد دوم او با عدد دوم حریف و عدد سوم او با عدد سوم حریف مقایسه شده و در این مقایسه‌ها اگر هریک از اعداد بازیکن از اعداد حریف بزرگتر باشد، به‌ازاء آن عدد یک امتیاز مثبت و اگر کوچکتر باشد یک امتیاز منفی به بازیکن تعلق می‌گیرد. در صورت تساوی، بازیکن امتیازی برای آن عدد دریافت نمی‌کند. درنهایت امتیازی که به بازیکن داده می‌شود، برابر با مجموع امتیازی خواهد بود که از هریک از سه عدد به‌دست می‌آورد.

اگر مجموع سه عدد می‌بایست برابر با ۵ شود، ماتریس نتیجه برای بازیکن اول به‌صورت جدول(۲) خواهد بود. همان‌طور که در بازی قبل گفته شد، به دلیل جمع صفر بودن بازی‌های Blotto، ماتریس نتیجه بازیکن دوم مشابه همین ماتریس می‌باشد، اما علامت امتیازات معکوس می‌گردد.

جدول(۲): ماتریس نتیجه برای بازیکن اول در یک نمونه بازی Blotto

	(۱،۱،۳)	(۱،۲،۲)	(۱،۳،۱)	(۲،۱،۲)	(۲،۲،۱)	(۳،۱،۱)
(۱،۱،۳)	۰	۰	۰	۰	-۱	۰
(۱،۲،۲)	۰	۰	۰	۰	۰	۱
(۱،۳،۱)	۰	۰	۰	-۱	۰	۰
(۲،۱،۲)	۰	۰	۱	۰	۰	۰
(۲،۲،۱)	۱	۰	۰	۰	۰	۰
(۳،۱،۱)	۰	-۱	۰	۰	۰	۰

با توجه به جدول بالا، هر سه عمل (۱،۲،۲)، (۲،۱،۲) و (۲،۲،۱)، تعادل Nash و استراتژی غالب برای این بازی می‌باشند. اگر احتمال انتخاب اعمال در ابتدای بازی یکسان درنظر گرفته شوند، منطقی است که در دفعات متعدد اجرا، احتمال همگرایی به هریک از سه استراتژی تقریباً یکسان باشد. اما اگر احتمال اولیه یک استراتژی را مثلاً با توجه به اطلاعات اولیه‌ای که درباره دامنه مسئله در دست داریم، به میزان جزئی افزایش دهیم، احتمال همگرایی به آن استراتژی بیشتر خواهد شد. نمودارهای شکل (۴) این مسئله را نشان می‌دهند.



شکل(۴): درصد دفعات همگرایی به هریک از سه استراتژی غالب در ۱۰۰۰۰ بار اجرای الگوریتم با احتمال اولیه برابر برای تمام اعمال (راست) و پس از افزایش جزئی احتمال اولیه عمل (۱،۲،۲) (چپ)

۴- نتیجه گیری

در این مقاله، روشی مبتنی بر اتوماتای یادگیر برای یافتن استراتژی غالب در بازی‌های Blotto ارائه گردید. با توجه به نتایج آزمایشات انجام‌شده، استفاده از اتوماتای یادگیر در ساختار بازیکنان منجر به یادگیری استراتژی غالب توسط آن‌ها و همگرایی سریع رفتار آن‌ها به رفتار بهینه می‌گردد. این بازی را می‌توان مدلی از بسیاری از فرآیندهای دنیای واقعی که در آن‌ها نیاز به تقسیم بهینه منابع محدود بین چندین کار یا محل وجود دارد درنظر گرفت. به‌این ترتیب روش ارائه شده، در بسیاری از کاربردهای بزرگ و برای حل مسائل مطرح در سیستم‌های چندعامله رقابتی که دارای استراتژی غالب می‌باشند قابل استفاده بوده و دستیابی به حداکثر سود ممکن را تضمین می‌نماید.

۵- مراجع

1- Roberson, B., "*The Colonel Blotto Game*", Journal of Economic Theory, vol. 29, no. 1, pp. 1-24, Springer Berlin, 2006.

2- Golman, R., Page, S. E., "*General Blotto: Games of Allocative Strategic Mismatch*", Center for Complex Systems, University of Michigan, 2006.

3- Tuyls, K., Nowe, A., "*Evolutionary Game Theory and Multi-Agent Reinforcement Learning*", the Knowledge Engineering Review, vol. 20, pp. 63-90, 2005.

4- Nowe, A., Verbeeck, K., Peeters, M., "*Learning Automata as a Basis for Multi-Agent Reinforcement Learning*", Proceedings of First International Workshop on Learning and Adaptation in Multi-Agent Systems (LAMAS), Utrecht, the Netherlands, 2005, pp. 71-85, 2006.

5- Shirazi, M.R., Meybodi, M.R. "*Application of Learning Automata to Cooperation in Multi-Agent Systems*", Proceedings of First International Conference on Information and Knowledge Technology (IKT2003), pp. 338-349, 2003.

6- Shirazi, M. R., Meybodi, M. R., "*Solving Iterated Prisoner's Dilemma Using Learning Automata*", Proceedings of First Iranian Conference on Mechatronics Engineering, ICME2003, pp. 349-362, Qazvin, Iran, 2003.

7- Verbeek, K, Nowe, A., Peeters, M, Tuyls, K. "*Multi-Agent Reinforcement Learning in Stochastic Single and Multi-Stage Games*", Lecture Notes in Computer Science, Springer Berlin, vol. 3394, pp. 275-294, 2005.

8- Banerjee, B., Peng, J., "*Convergence of No-Regret Learning in Multi-Agent Systems*", Proceedings of the First International Workshop on Learning and Adaptation in Multi-Agent Systems (LAMAS), Utrecht, the Netherlands, 2005.

9- Bowling, M., Veloso, M. M., *Existence of Multi-Agent Equilibria with Limited Agents*, Technical Report CMU-CS-02104, Computer Science Department, Carnegie Mellon University, 2002.

10- Merolla, J., Munger, M., Tofias, M., "*Lotto, Blotto, or Frontrunner: The 2000 U. S. Presidential Election and the Nature of Mistakes*", Duke University, 2003.

11- Powers, M. R., Shen, Z., *Colonel Blotto in the War on Terror: Implications for Event Frequency*, American Risk and Insurance Association (ARIA) Annual Meeting, Washington D.C., August 2006.