جهت تهيه فايل WORD اين مقاله به سايت DaneshResan.com مراجعه نماييد و عنوان مقاله را جستجو كنيد
بيش از ۲ ميليون مقاله فارسى در اين سايت موجود ميباشد

Archive of SID

انجمن كامپيوتر ايران Computer Society of Iran
۱۹ الی ۲۱ اسفند ۱۳۸۶
مقاله کامل
دانشکده مهندسی کامپیوتر

يک الگوريتم تقريبي جديد براي پوشش چندضلعي‌هاي ساده با نواحي ستاره‌اي

محمد حسين زاده مقدم
دانشگاه آزاد اسلامی هشترود، گروه کامپيوتر
هشترود، ايران
mh.moghaddam@yahoo.com

عليرضا باقری
دانشکده مهندسي کامپيوتر و فناوري اطلاعات،
دانشگاه صنعتي امير كبير، تهران، ايران
ar_bagheri@aut.ac.ir

چکيده: مسئله پوشش چندضلعي‌هاي ساده با کمترين تعـداد نـواحي ستاره‌اي NP-hard است. بنابراين طراحي الگوريتم‌هاي تقريبي در اين زمينه از اهميت بسياري برخوردار است. تا بـه حـال بـراي ايـن مـسئله الگوريتم تقريبي که فاکتور تقريبش بهتر از $\lfloor n/3 \rfloor$ باشد طراحي نـشده است. ما در ايـن مقالـه الگـوريتم تقريبـي جديـدي بـا فـاکتور تقريـب $\lceil n/8 \rceil$ براي مسئله مـذکور ارائـه کـرده ايـم کـه داراي زمـان اجـراي $O(n^3)$ مي‌باشد.

واژه هاي کليدي: الگوريتم تقريبـي، پوشـش چندضـلعي‌هـا، مـسئله گالري هنري، نگهباني نقطه‌اي، نواحي ستاره‌اي.

۱- مقدمه

تجزيه چندضلعي ها کاربردهاي تئوري و عملياتي زيادي دارد. حوزه-هايي مانند تشخيص الگو[۶]،پردازش داده[۱۲]، پايگاه داده‌ها[۱۳]، پردازش تصوير[۱۴]، گرافيک کامپيوتري[۱۶]، تقسيم بندي نواحي مسيريابي [۱۰] را مي‌توان نام برد. همچنين در هندسه محاسباتي ارائه الگوريتم براي مسائل مرتبط با چندضلعي‌هاي ساده بسيار سختر از ارائه الگوريتم براي انواع خاص چندضلعي‌هاي ساده مانند چندضلعي‌هاي محدب و ستاره اي و غيره مي‌باشد. يک روش براي حل مسئله‌هاي مرتبط با چندضلعي‌هاي ساده اين است که چندضلعي داده شده را به بخش‌هاي ساده تري تجزيه کرده و سپس مسئله را براي اين بخش‌ها حل کنيم[۵]. چند ضلعي‌هاي ساده را مي‌توان به زير چندضلعي‌هايي مانند زير چندضلعي‌هاي محدب، ستاره‌اي، حلزوني، يکنواخت و غيره تجزيه کرد.

نقطه‌ي x در چندضلعي ساده P توسط نقطه‌ي ديگري در P مانند y قابل رويت است هر گاه خط واصل دو نقطه‌ي مذکور بطور کامل در داخل P قرار گيرد. يک چند ضلعي مانند P را ستاره‌اي مي‌گوييم هر گاه حد اقل يک نقطه در داخل P وجود داشته باشد بطوريکه هر نقطه از P توسط آن نقطه قابل رويت باشد. به مجموعه نقاطي از P که هر نقطه از P را مي بينند، هسته P مي‌گوييم. تجزيه چندضلعي به بخش-هاي ساده تر را افراز گوييم هرگاه اين بخش‌ها بجز در مرزها باهمديگر اشتراکي نداشته باشند. همچنين منظور از پوشش چندضلعي توسط بخش‌هاي ساده تر اين است که هيچ محدوديتي در اشتراک اين بخش-ها وجود ندارد. البته افراز و پوشش چندضلعي‌ها با توجه به مورد بهينه سازي باهمديگر فرق مي کنند. گاهي در تجزيه چندضلعي هدف اينست که چندضلعي داده شده به کمترين تعداد زير چندضلعي‌ها تجزيه شود و گاهي هدف اينست که چندضلعي داده شده به تعدادي زير چندضلعي تجزيه شود بطوريکه مجموع اندازه لبه‌هاي داخلي که براي تجزيه مورد استفاده قرار گرفته اند،کمينه شود. آنچه در اين مقاله مورد نظر است مورد اول مي باشد.

در سال ۱۹۸۳ Keil نشان داد که افراز چند ضلعي هاي حفره دار به کمترين تعداد نواحي ستاره‌اي NP-hard مي‌باشد[۹]. در سال۱۹۸۱ Avis و همکارانش[۲] براي افراز چندضلعي‌هاي بدون حفره به حداکثر *n/3* ناحيه ستاره‌اي، الگوريتمي با زمان اجراي *O(nlogn)* ارائه دادند. بعداً در سال۱۹۸۴ Chazelle و Aggarwal [۳] توانستند الگوريتمي براي افراز چندضلعي به *n/3* ناحيه ستاره‌اي با زمان اجراي *O(n)* ارائه بدهند. در سال۱۹۸٤ Keil [۹] توانست الگوريتمي با زمان اجراي $O(n^5 N^2 \log n)$ براي افراز چندضلعي‌ها به کمترين تعداد نواحي ستاره‌اي ارائه کند که در آن N تعداد رئوس مقعر چندضلعي مي‌باشد.

در سال۱۹۸۳ Rourke و همکارانش[۱۵] نشان دادند که پوشش چندضلعي‌هاي حفره دار با کمترين تعداد نواحي ستاره اي مسئله‌اي NP-hard مي‌باشد. همچنين در سال۱۹۸٦ Lee و Lin [۱۱] نشان دادند که مسئله مذکور براي چندضلعي‌هاي بدون حفره بشرطيکه هسته نواحي ستاره‌اي شامل يک راس باشد، نيز NP-hard مي‌باشد. بعداً Aggarwal [۴] نشان داد که شرط فوق لازم نيست و مسئله مذکور براي چندضلعي‌هاي بدون حفره NP-hard مي‌باشد. بدليل سختي مسئله، نسخه‌هاي محدودي از مسئله پوشش چندضلعي توسط نواحي ستاره‌اي تعريف شد. در نسخه‌اي از اين مسئله تاکيد شده است که هسته نواحي ستاره‌اي رئوس چندضلعي باشد. در سال۱۹۸۶ Ghosh [۷] براي اين مسئله الگوريتمي تقريبي با فاکتور تقريب لگاريتمي با زمان اجراي $O(n^5 \log n)$ ارائه کرد.Aggarwal و همکارانش [۱] در سال ۱۹۸۸ الگوريتمي تقريبي با فاکتور تقريب لگاريتمي براي نسخه‌ي جديدي از مسئله پوشش چندضلعي با نواحي ستاره‌اي ارائه

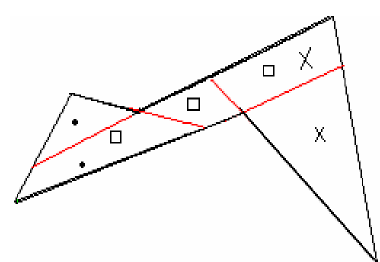
جهت تهیه فایل WORD این مقاله به سایت DaneshResan.com مراجعه نمایید و عنوان مقاله را جستجو کنید
بیش از ۲ میلیون مقاله فارسی در این سایت موجود میباشد
Archvie of SID

دادند که در آن اضلاع نواحي ستاره‌اي متشكل از اضلاع خود چندضلعي و يا امتداد آنها و يا قطر هاي چندضلعي مي‌باشد. البته زمان اجراي الگوريتم آنها براي نسخه‌اي كه قطرها را در نظر نمي گيرد $O(n^4 \log n)$ و براي نسخه‌اي كه قطرها را هم در نظر مي-گيرد $O(n^8 \log n)$ مي‌باشد.

براي حالت محدود نشده‌ي مسئله تا به حال فاكتور تقريبي بهتر از $\lfloor n/3 \rfloor$ در مقالات محاسبه نشده است. آنچه ما در اين مقاله ارائه مي-كنيم الگوريتم تقريبي جديدي با فاكتور تقريب $\lceil n/8 \rceil$ براي مسئله پوشش چندضلعي‌هاي ساده با نواحي ستاره‌اي مي‌باشد كه هيچ محدوديتي در مورد نواحي ستاره‌اي در نظر گرفته نشده است. الگوريتم ما داراي زمان اجراي $O(n^3)$ مي‌باشد.

۲- توجه به نواحی خاص و توصیف الگوریتم

نواحي جالبي در چندضلعي‌هاي ساده وجود دارد كه داراي خواص جالبي مي‌باشند و مي‌توان از اين نواحي براي طراحي الگوريتمي تقريبي براي مسئله پوشش چندضلعي استفاده نمود. اين نواحي كه به آنها نواحي محدب ماكسيمال مي‌گوييم از امتداد دادن اضلاع رئوس مقعر چند ضلعي بدست مي‌آيند و داراي دو خاصيت مي‌باشند. اولا محدب هستند و ثانيا ماكسيمال مي‌باشند. يعني با اضافه كردن حتي يک نقطه ديگر از چندضلعي به ناحيه، محدب بودن خود را از دست خواهد داد. در شكل ۱ با امتداد دادن اضلاع رئوس مقعر، داخل چندضلعي به نواحي افراز مي‌شود كه به آنها تكه‌هاي محدب مي‌گوييم و از تركيب مناسب آنها به نواحي محدب ماكسيمال مي‌رسيم. با كنار هم قرار دادن تكه‌هايي كه داراي علامت دايره مي‌باشند به يک ناحيه محدب ماكسيمال مي‌رسيم و همچنين تكه‌هايي كه داراي علامت مربع مي-باشند يک ناحيه محدب ماكسيمال ديگر و تكه‌هايي كه داراي علامت ضربدر مي‌باشند ناحيه محدب ماكسيمال سوم را تشكيل مي‌دهند.



شكل(۱): نواحي محدب ماكسيمال

همانطور كه گفته شد هر سه ناحيه محدب ماكسيمال محدب بوده و نمي‌توان هيچ تكه‌اي به آنها اضافه كرد بدون اينكه محدب بودن آنها از بين برود.

تعريف تكه محدب : يک ناحيه محدب مثل $c \subset P$ را يک تكه محدب از چند ضلعي P مي ناميم هرگاه ناحيه محدب ديگري مثل b نباشد كه c زيرمجموعه‌ي محض b باشد وبا امتداد دادن يكي از اضلاع رئوس مقعر به دو قسمت تقسيم شود.

تعريف ناحيه محدب ماكسيمال: يک ناحيه محدب در داخل چند ضلعي را ناحيه محدب ماكسيمال مي‌گوييم هرگاه از كنار هم قرار دادن يک يا چند تكه محدب بدست آمده باشد و ماكسيسمال باشد. يعني با اضافه كردن هر تكه محدب ديگري به آن محدب بودن آن از بين برود.

تعريف تكه مكمل يک ناحيه غير محدب: مكمل يک ناحيه غير محدب b كه تنها يک راس مقعر دارد، تكه‌ي محدبي از چندضلعي P است كه جدا از b بوده و در راس مقعر b و حداقل در يک ضلع با b مشترک باشد.

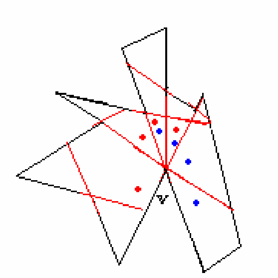
نتيجه : هر ناحيه محدب ماكسيمال را مي‌توان از يـک نقطـه ديـد زد و هر نقطه‌اي كه خارج از يک ناحيـه محـدب ماكـسيمال قـرار دارد نمـي تواند كل آن ناحيه محدب ماكسيمال را ديد بزند.

۲-۱ توصیف الگوریتم

توصیف این الگوریتم به صورت خلاصه در ادامه می‌آید. ابتدا با امتداد دادن اضلاع رئوس مقعر، تکه‌های محدب را بدست آورده و سپس $O(n)$ تا ناحیه محدب ماکسیمال را از ترکیب آنها بدست آورده (یک پوشش از چندضلعی داده شده توسط نواحی محدب ماکسیمال) و اشتراکات این نواحی محدب ماکسیمال را محاسبه کرده و با استفاده از الگوریتم تقریبی Johnson که برای مساله پوشش مجموعه ارائه شده است[۸]؛ کمترین تعداد اشتراکات نواحی محدب ماکسیمال را به دست می‌آوریم بطوریکه هر یک از نواحی محدب ماکسیمال در حداقل یکی از این اشتراکات شریک باشند. در نهایت هر یک از این نواحی مشترک هسته-ی یک ناحیه ستاره‌ای می شود که این ناحیه ستاره‌ای متشکل از نواحی محدب ماکسیمالی است که در ابن ناحیه مشترک اشتراک دارند.

البته در یک چندضلعی ساده، تعداد نواحی محدب ماکسیمال می‌تواند نمایی باشد[۱]. بنابراین ما در فاز اول الگوریتم همه‌ی نواحی محدب ماکسیمال را بدست نمی آوریم بلکه برای هر یک از رئوس مقعر مثل v_i تعداد تکه‌های محدبی که در راس v_i مشترکند را به دو گروه افراز می‌کنیم: یکی آنهاییکه در امتداد لبه‌ی i ام هستند و دیگری آنهاییکه در امتداد لبه‌ی $i+1$ ام هستند. به عنوان مثال در شکل ۲ این دو گروه را با دو رنگ متفاوت نشان اده ایم:

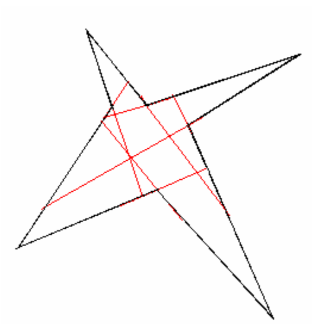
جهت تهیه فایل WORD این مقاله به سایت DaneshResan.com مراجعه نمایید و عنوان مقاله را جستجو کنید
بیش از ۲ میلیون مقاله فارسی در این سایت موجود میباشد
Archvie of SID



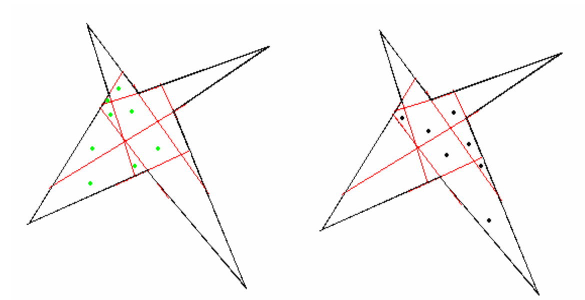
شکل (۲):افراز مجموعه تکه هاي مشترک در راس v_i

حال یک بار گروه اول و بار دیگر گروه دوم را با هم اجتماع کرده و گسترش می‌دهیم تا یک ناحیه محدب ماکسیمال کشف شود(نحوه‌ی کار در ادامه خواهد آمد). اگر این کار را برای تمام رئوس مقعر بکنیم آنوقت اولا کل چندضلعی پوشش داده می‌شود و ثانیا تعدا آنها $O(n)$ خواهد بود. در مورد اینکه آیا واقعا کل چندضلعی پوشش داده می‌شود یا نه؟ به این نکته توجه کنید که تمام تکه های محدب موجود در امتداد حد اقل یکی از چنین نواحی محدب ماکسیمال می‌باشد.

شکل ۳ یک چندضلعی ساده را نشان می‌دهد که با امتداد دادن اضلاع رئوس مقعر چندضلعی به چندین تکه محدب تجزیه شده است. در شکل ۴به چند ناحیه محدب ماکسیمال که با کنار هم گذاشتن مناسب تکه‌های محدب (نحوه‌ی کار در ادامه خواهد آمد) بدست آمده‌اند توجه فرمایید.



شکل (۳):تکه‌هاي محدب یک چندضلعي ساده



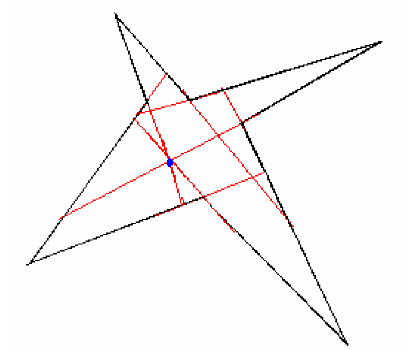
شکل (٤):دو تا از نواحي محدب ماکسیمال یک چندضلعي ساده

در فاز اول الگوریتم برای بدست آوردن نواحی محدب ماکسیمال، برای هر یک از رئوس مقعر مثل v_i تعداد تکه‌های محدبی که در راس v_i مشترکند را به دو گروه افراز می‌کنیم: یکی آنهاییکه در امتداد لبه‌ی i ام هستند و دیگری آنهاییکه در امتداد لبه‌ی $i+1$ ام هستند. حال در مورد هر یک از این دو دسته فرایند زیر را تکرار می‌کنیم: این تکه‌ها را باهم ترکیب کرده و آنها را تیک سفید می‌زنیم و یکی از تکه‌های محدب را که همسایه‌ی ناحیه بدست آمده بوده و تیک قرمز نخورده است، به آنها اضافه می‌کنیم حال اگر ناحیه بدست آمده محدب باشد آنگاه این تکه را هم تیک سفید زده و دوباره یکی از همسایه‌های ناحیه بدست آمده را که تیک قرمز نخورده است، انتخاب و اضافه می‌کنیم و این روند را تا وقتی ادامه می‌دهیم که یا ناحیه نامحدب شود ویا هیچ همسایه‌ای نماند که تیک قرمز نخورده است. حال اگر ناحیه نامحدب شد تکه مکمل آن را اضافه می‌کنیم تا محدب شود اما اگر باز نامحدب شد دوباره تکه مکمل را اضافه می‌کنیم تا وقتیکه یا ناحیه محدب شود و یا اینکه تکه مکمل نداشته باشد. اگر محدب شد در این صورت تمام تکه های اضافه شده را تیک سفید زده و بدنبال تکه همسایه‌ای که تیک قرمز نخورده است می‌گردیم ولی اگر تکه مکمل نداشت در این صورت تمام مکمل هایی را که اضافه کرده‌ایم تیک قرمز زده و دوباره بدنبال همسایه‌ای که تیک قرمز نخورده است می‌گردیم. اگر هیچ همسایه‌ای نماند که تیک قرمز نخورده باشد در این صورت یک ناحیه محدب ماکسیمال را بدست آورده‌ایم بنابراین باید تمام تیک‌های قرمز را پاک کنیم.

در فاز دوم الگوریتم به ناحیه‌های محدب ماکسیمال شماره‌های ۱ تا m نسبت می‌دهیم. به ازاء هر راس i از تکه‌های محدب، مجموعه‌ای مانند A_i ایجاد می کنیم. A_i شامل شماره نواحی محدب ماکسیمالی است که در راس i مشترکند. فرض می‌کنیم مجموعه X که باید پوشش داده شود مجموعه شماره نواحی محدب ماکسیمال باشد، آنگاه A_i ها هر کدام زیر مجموعه‌ای از X هستند. بنابراین می‌توان با الگوریتم تقریبی جانسون کمترین تعداد A_i ها را انتخاب کرد بطوریکه مجموعه X پوشش داده شود.

نتیجه اجرای این الگوریتم برای چندضلعی داده شده در شکل ۳، در شکل ۵ نشان داده شده است. می‌بینیم که راسی که در شکل ۵ با نقطه آبی نشان داده شده است محل اشتراک هر چهار ناحیه محدب ماکسیمال است، در نتیجه کل چندضلعی با یک ناحیه ستاره‌ای که نقطه‌ی مذکور هسته‌ی آن می‌باشد، پوشش داده می‌شود. الگوریتم ۱ شبه کد الگوریتم ارائه شده را بیان می کند.

Archvie of SID



شکل (۵): نتیجه اجرای الگوریتم بر روی شکل ۳

الگوریتم ۱- الگوریتم پوشش چندضلعی‌های ساده توسط نواحی ستاره‌ای

فاز ۱- پیدا کردن نواحی محدب ماکسیمال

۱. با امتداد دادن اضلاع رئوس مقعر، تکه‌های محدب را بدست آورید.
با فرض اینکه هرتکه محدب با C_i نشان داده شود آنگاه $\bigcup_{i=1}^{m} C_i$ مساوی چندضلعی داده شده P خواهد بود

۲. به ازاء هر یک از رئوس مقعر v_i مراحل زیر را تکرار کن:

۲٫۱. تکه‌های محدبی که در راس v_i مشترکند را به دو مجموعه افراز کن :یکی آنهاییکه در راستای لبه‌ی iام و دیگری آنهاییکه در راستای لبه‌ی $i+1$ام هستند. مراحل زیر را برای هر دو مجموعه تکرار کن.

۲٫۱٫۱. مجموعه تکه‌های محدب مذکور را مساوی D_j قرار بده واین تکه ها را تیک سفید بزن و مراحل زیر را تا وقتیکه همه همسایه های D_j تیک قرمز نخورده اند ادامه بده:

۲٫۱٫۱٫۱. یکی از همسایه‌های D_j که تیک قرمز نخورده است را انتخاب کن (مثلا C_k)

۲٫۱٫۱٫۲. اگر اجتماع D_j و C_k محدب است آنوقت $D_j = D_j \cup C_k$ و C_k را تیک سفید بزن و برو به ۲٫۱٫۱٫۱

۲٫۱٫۱٫۳. اگر $D_j \cup C_k$ تکه مکمل ندارد آنوقت C_k را تیک قرمز بزن وبرو به ۲٫۱٫۱٫۱

۲٫۱٫۱٫۴. تا وقتیکه $D_j \cup C_k$ محدب نشده و تکه مکمل دارد تکه مکمل را به $D_j \cup C_k$ اضافه کن.

۲٫۱٫۱٫۵. اگر $D_j \cup C_k$ محدب است در این صورت همه تکه های مکمل اضافه شده تا به حال و C_k را به D_j اضافه کرده و کل تکه های D_j را تیک سفید بزن و برو به ۲٫۱٫۱٫۱

۲٫۱٫۱٫۶. اگر $D_j \cup C_k$ محدب نباشد در این صورت همه نواحی مکمل اضافه شده تابه حال و C_k را تیک قرمز بزن واز D_j کم کن و برو به ۲٫۱٫۱٫۱

۲٫۱٫۲. اکنون D_j یک ناحیه محدب ماکسیمال است. M_j را برابر D_j قرار بده و تمام نواحی که تیک قرمز خورده اند تیک آنها را پاک کن.

فاز ۲- محاسبه اشتراک نواحی محدب ماکسیمال و اجرای الگوریتم تقریبی Johnson

۱. با فرض اینکه X مجموعه شماره همه نواحی محدب ماکسیمال است، برای هر راس از هر تکه محدب C_i، مجموعه ای مانند A_i متشکل از تمام نواحی محدب ماکسیمالی که در آن راس مشترکند ایجاد کن. مجموعه F را مساوی مجموعه همه A_i ها و Q را مساوی تهی قرار بده.

۲. A_j متعلق به F را پیدا کن که به ازاءهر $i \neq j$ داشته باشیم $|A_j| \geq |A_i|$

۳. A_j را به Q اضافه کن و از F حذف کن

۴. به ازاء هر A_i متعلق به F قرار بده $A_i = A_i - A_j$ و X=X- A_j

۵. اگر X مخالف تهی است برو به ۲

رئوس متناظر با A_i ها را بطوریکه i ها متعلق به Q اند به عنوان جواب الگوریتم اعلام کن و متوقف شو.

۲-۲ تحلیل زمانی الگوریتم

در این قسمت الگوریتم ارائه شده را از نظر پیچیدگی زمانی تحلیل کرده و نشان می‌دهیم که دارای پیچیدگی زمانی $O(n^3)$ می‌باشد. ابتدا فاز اول را تحلیل می‌کنیم. در گام اول الگوریتم، که با ادامه دادن اضلاع رئوس مقعر تکه‌های محدب را بدست می‌آوریم، با توجه به اینکه این تکه‌ها از رسم $O(n)$ تا خط بوجود می‌آیند بنابراین در زمان $O(n^2)$ قابل انجام است [۳]. در گام دوم نواحی محدب ماکسیمال را محاسبه می‌کنیم، باید توجه کنیم که وقتی قرار است که یک ناحیه محدب ماکسیمال محاسبه شود ما حداکثر کل تکه‌های محدب را که حداکثر $O(n^2)$ است بررسی می‌کنیم و از طرفی در فاز اول الگوریتم حداکثر $O(n)$ ناحیه محدب ماکسیمال خواهیم داشت، به این ترتیب گام دوم الگوریتم درزمان $O(n^3)$ قابل انجام است. توجه کنید که تست محدب بودن و تکه مکمل داشتن در زمان $O(1)$ قابل انجام است. در قسمت ۲٫۱٫۱ که در آن هر دفعه باید یک همسایه را که تیک قرمز نخورده انتخاب کنیم، می‌توان همسایه های D_j را در یک لیست

Archvie of SID

پیوندی نگهداری کرد و هر کدام که تیک قرمز می‌خورند را از لیست حذف نمود و به این صورت با $O(1)$ می‌توان یک همسایه را که تیک قرمز نخورده است، انتخاب کرد.

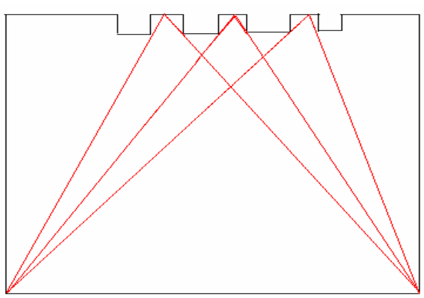
در فاز دوم الگوریتم ابتدا مجموعه A_i ها (مجموعه شماره نواحی محدب ماکسیمالی که در حداقل یک راس مشترک هستند) را تشکیل می‌دهیم. ساختن تمام این مجموعه A_i ها در $O(n^3)$ قابل انجام است و می‌توان آنها را در فاز قبلی ساخت. از آنجایی که الگوریتم تقریبی پوشش مجموعه می‌تواند در زمان $O(\sum |A_i|)$ پیاده سازی شود[۶] و در مسئله ما تعداد زیر مجموعه‌ها (یعنی Ai ها که همان اشتراک نواحی محدب ماکسیمال هستند)حداکثر $O(n^2)$ است و اندازه هر مجموعه Ai حداکثر مساوی تعداد المنتهایی (یعنی نواحی محدب ماکسیمال) که باید پوشش داده شوند، است. این تعداد حداکثر $O(n)$ می‌باشد. بنابراین فاز دوم در زمان $O(n^3)$ قابل انجام می‌باشد. در نتیجه کل الگوریتم ما دارای پیچیدگی زمانی $O(n^3)$ خواهد بود.

۳- فاکتور تقریب الگوریتم

آنچه ما ارائه نموده ایم الگوریتمی جدید برای پوشش چندضلعی‌های ساده توسط نواحی ستاره‌ای می‌باشد و این الگوریتم دارای فاکتور تقریب $\lceil n/8 \rceil$ می‌باشد. برای محاسبه فاکتور تقریب، می‌توان با توجه به نحوه‌ی طراحی الگوریتم بصورت تحلیلی بدترین رفتار الگوریتم را پیدا کرده و فاصله جواب بهینه را با جواب الگوریتم مقایسه کنیم. اگر بتوان چندضلعی پیدا کرد که الگوریتم ما بیشترین ناحیه ستاره‌ای و الگوریتم بهینه کمترین ناحیه ستاره‌ای را برای آن جواب دهند، آنگاه نسبت دو مقدار فاکتور تقریب خواهد بود. از آنجاییکه در الگوریتم ما نواحی ستاره‌ای از اجتماع نواحی محدب ماکسیمالی که همه باهمدیگر اشتراک دارند، بدست می‌آید و با توجه به اینکه فقط اشتراکات بین نواحی محدب ماکسیمال هستند که تعداد نواحی ستاره‌ای را کاهش می‌دهند، باید گفت که تعداد نواحی ستاره‌ای در الگوریتم ما و فاصله آن با مقدار بهینه آن به دو چیز بستگی دارد: تعداد نواحی محدب ماکسیمال و کم و زیاد بودن اشتراکات آنها.

بدترین مثال موقعی خواهد بود که در آن کمترین اشتراکات بین نواحی محدب ماکسیمال وجود داشته باشد. این موقعی بدست می‌آید که از میان m ناحیه محدب ماکسیمال m-1 ناحیه فقط با یکی از نواحی اشتراک داشته باشند و هیچ اشتراکی دیگری بین این m-1 ناحیه نباشد. دقت شود که ناحیه محدب ماکسیمالی وجود ندارد که با هیچ ناحیه محدب ماکسیمال دیگری اشتراک نداشته باشد، یعنی حداقل باید با یک ناحیه محدب دیگر اشتراک داشته باشد و این کار لازمه‌اش اینست که کنج ها به شکل مستطیلی باشند که امتداد اضلاع آنها همدیگر را قطع نکند، یعنی اضلاع متناظرشان موازی هم باشند.

برای پوشش چندضلعی شکل۶، دو ناحیه ستاره ای که هسته‌ی هر کدام در دو راس انتهایی ضلع پایین قرار می‌گیرند کافی است. در حالیکه در الگوریتم ما تعداد نواحی ستاره‌ای برای پوشش این چندضلعی $n/4$ است. این همان مثالی است که در آن کمترین اشتراکات بین نواحی محدب ماکسیمال وجود دارد و الگوریتم ما بیشترین تعداد نواحی ستاره‌ای و الگوریتم بهینه کمترین تعداد نواحی ستاره‌ای را جواب می‌دهد. در مورد چندضلعی‌هایی که ستاره‌ای هستند (که جواب الگوریتم بهینه ۱ است) الگوریتم ما نیز بهترین عملکرد را دارد. چون در هر چندضلعی که خودش ستاره‌ای باشد تمام نواحی محدب ماکسیمال آن در هسته چندضلعی مشترک هستند و بنابراین الگوریتم ما نیز یک ناحیه ستاره‌ای را جواب‌می‌دهد و این یکی از بهترین عملکردهای الگوریتم ما خواهد بود. بنابراین چندضلعی شکل ۶ مثالی است که در آن الگوریتم بهینه کمترین تعداد ناحیه ستاره ای، یعنی دو ناحیه، را جواب می‌دهد و در آن اشتراکات نواحی محدب ماکسیمال کمترین می‌باشد. توجه شود که اگر کنج اضافه شده به شکل مستطیل نباشد (مثلا بصورت مثلثی باشد) آنوقت یا آن ناحیه محدب ماکسیمال با یکی از اشتراکات بین سایر نواحی محدب ماکسیمال اشتراک خواهد داشت (آنوقت در الگوریتم ما لازم نیست که ناحیه ستاره ای اضافه شود) و یا آن کنج ایجاد شده توسط دو هسته قبلی قابل محافظت نخواهد بود که در این حالت هم در الگوریتم ما و هم در الگوریتم بهینه یک ناحیه ستاره ای به تعداد نواحی ستاره ای مورد نیاز افزوده خواهد شد. بنابراین در هیچ یک از این دو حالت پیش آمده الگوریتم ما ناحیه ستاره ای اضافه نخواهد کرد مگر اینکه در الگوریتم بهینه نیز اضافه شود.



شکل (٦): مثالي براي بدست آوردن فاکتور تقريب

در نتیجه مثالی که زده شده است منحصر بـه فـرد اسـت، یعنـی تنهـا مثالی است که شرایط در آن برای الگوریتم ما بدترین حالت است، یعنی نواحی محدب کمترین اشتراک را دارند و جواب بهینه نیز کمترین است یعنی دو ناحیه ستاره ای کافی اسـت. در ایـن حالـت کـه الگـوریتم مـا بدترین عملکرد خودش را دارد ما می توانیم هر دفعـه بـا اضـافه کـردن چهار راس (بطوریکه کنج ایجاد شده شرایط فوق را دارا باشد) به تعـداد

Archvie of SID

نواحی ستاره ای مورد نیاز الگوریتم خودمان یک واحد اضافه کنیم در حالیکه جواب بهینه همچنان دوناحیه ستاره‌ای می‌باشد. بنابراین با توجه به این مثال می‌توان گفت که فاکتور تقریب الگوریتم ما $\lceil n/8 \rceil$ است.

۴- نتیجه گیري

تجزیه چندضلعی به نواحی ستاره‌ای در حوزه‌های مختلف دارای کاربردهای تئوری و عملیاتی فراوانی است. نسخه‌ی محدود نشده‌ی مسئله پوشش چندضلعی‌های ساده توسط نواحی ستاره‌ای نسبت به نسخه‌های محدود آن بسیار سخت تر است. بنابراین تا به حال فاکتور تقربی بهتر از $\lfloor n/3 \rfloor$ برای این مسئله محاسبه نشده است. ما در این مقاله الگوریتم تقریبی جدیدی با فاکتور تقریب $\lceil n/8 \rceil$ و زمان اجرای $O(n^3)$ برای این مسئله ارائه کرده ایم. تا آنجایی که ما اطلاع داریم این الگوریتم دارای بهترین فاکتور تقریب در میان الگوریتم‌های موجود برای این مسئله است و همچنین زمان اجرای بهتری دارد. با توجه به اینکه مسئله نگهبانی نقطه‌ای چندضلعی‌های ساده معادل با تجزیه چندضلعی‌های ساده به نواحی ستاره‌ای می‌باشد، می‌توان گفت که الگوریتم ارائه شده در واقع الگوریتمی تقریبی با فاکتور تقریب $\lceil n/8 \rceil$ برای مسئله نگهبانی نقطه‌ای نیز می‌باشد. به عنوان کار آتی می‌توان در مورد بهبود فاکتور تقریب و زمان تحقیق نمود.

۵- مراجع

[1] Aggarwal, A., Ghosh, S.K, and Shyamasundar, R.K. Computational Complexity of Restricted Polygon Decompositions. In G. T. Toussaint,editor, Computational Morphology, pages1-11. North-Holland, Amsterdam, Netherlands, 1988.
[2] Avis, D., and Toussaint, G.T. An Efficient Algorithm for Decomposing a Polygon into Star-Shaped Polygons. Pattern Recogn., 13:395-398,1981.
[3] Aggarwal, A., and Chazelle, B. Efficient Algorithm for Partitioning a Polygon into Star-Shaped Polygons. Report, IBM T. J. Watson Res. Center.Yorktown Heights, NY,1984.
[4] Aggarwal, A. The Art Gallery Problem: Its Variations,Applications,and Algorithmic Aspects. Ph.D. thesis, Johns Hopkins Univ., Baltimore. MD.1984.
[5] Aggarwal, A., Guibas, L.J, Saxe, J., and W.Shor, P. A Linear-Time Algorithm for Computing the Voronoi Diagram of a Convex Polygon. Discrete Comput. Geom., 4(6):591-604,1989,
[6] Feng, H.Y.F, and Pavlidis, T. Decomposition of Polygons into Simpler Components:Feature Generation for Syntactic Pattern Recognition. IEEE Trans.Comput.,C-24:636-650,1975
[7] Ghosh, S.K. Approximation Algorithms for Art Gallery Problems.InProc,CanadianInform,Process.Soc.Congress,1987
[8] Johnson, D.S. Approximation Algorithms for Combinatorial Problems. Journal of Computer and System Sciences,9:256-278, 1974
[9] Keil, J.M. Decomposing a Polygon into Simpler Components. SIAMJ, Comput.,14:799-817,1985
[10] Lingas,A., Pinter, R., Rivest, R, and Shamir, A. Minimumedge Length Partitioning of Rectilinear Polygons. In Proc.20th Ath Allerton Conf.Commun. Control Comput., pages 53-63,1982.
[11] Lee, D. T., and Lin, A. Computational Complexity of Art Gallery Problems. .IEEE Trans.Inform.Theory,32:276-282,1986
[12] Lubiw, A. The Boolean Basis Problem and How to Cover Some Polygons. by Rectangles. SIAM J. on Discrete Mathematics,3:98-115,1990
[13] Lubiw, A.. Decomposing Polygonal Regions into Convex Quadrilaterals. In Proc. 1st Annu. ACM Sympos_.Comput. Geom., pages 97-106,1985
[14] Moitra, D. Finding a Minimal Cover for Binary Images: An Optimal Parallel Algorithm. Algorithmica,6:624-657,1991
[15] Rourke, J. O., and Supowit, K. J. Some NP-hard Polygon Decomposition Problems.IEEE Trans.Inform.Theory,IT-30:181-190,1983
[16] Tor, S.B., and Middleditch, A. E. Convex Decomposition of Simple Polygons.ACM Trans Graph.,3:344-365,1984.